Curso de extensão, MMQ – IFUSP, fevereiro/2014. Alguns exercício básicos

I – Exercícios

1 – (MMQ) Uma grandeza cujo valor verdadeiro x_0 é desconhecido, foi medida três vezes, com procedimentos experimentais idênticos e, portanto, mesmos desvios padrões, obtendo-se os dados x_1, x_2 e x_3, sendo nulas as covariâncias entre eles. Mostre que a média aritmética simples é a estimativa dada pelo MMQ.

2 – (MMQ) Para se estimar os valores de duas grandezas, a_0 e b_0, elas foram medidas, obtendo-se os seguintes resultados:

$$a_0 \approx 7$$

$$a_0 \approx 5$$

$$a_0 + b_0 \approx 23$$

$$b_0 \approx 13$$

$$b_0 - a_0 \approx 9$$

Determine os valores a serem adotados para essas grandezas usando o MMQ.

R: 6,5 e 16,0, respectivamente para a_0 e b_0.

3 – (MMQ) Para conhecer o rendimento de um veículo (em litros por quilômetro), mediu-se o consumo em diferentes percursos (tabela abaixo). Determine os rendimentos urbano e rodoviário desse veículo usando o MMQ.

Percursos feitos (em km)		Consumo de combustível (litros)
Rodoviário	Urbano	
200	100	21
100	300	37
200	200	31

R: Urbano: 0,11 *l/km*; rodoviário: 0,05 *l/km*.

4- (MMQ e matriz de covariância) Escreva a expressão de $Q(a,b,c)$ para o ajuste dos parâmetros de uma parábola $y=a_0+b_0x+c_ox^2$ a dados experimentais (x_i,y_i,σ_i), não covariantes. A partir dela, obtenha as expressões para os parâmetros ajustados e para suas variâncias e covariâncias.

5 – (Média de dados pelo MMQ) Escreva a expressão $Q(a)$ para o ajuste do parâmetro a_0 da função $y=a_0$ a dados (y_i,σ_i), i=1, 2, ... n. Mostre que o valor ajustado $\tilde{a}$, é a média ponderada

$$\tilde{a} = \frac{\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad .$$

Mostre, também, que a variância de $\tilde{a}$ é

$$\sigma_{\tilde{a}}^2 = \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad .$$

6 – (MMQ, “ajuste” sem nenhum grau de liberdade) Escreva a expressão explícita para $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ no caso do ajuste dos parâmetros de uma reta por dois pontos experimentais (x_1,y_1,σ_1) e (x_2,y_2,σ_2). Escreva a matriz de covariância de $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$. (Note de que não há qualquer limitação nesse “ajuste”, apesar de o número de graus de liberdade, diferença entre o número de dados experimentais e de parâmetros a ajustar, ser nulo e a função ajustada passar pelos dois pontos experimentais.)

7 – (Minimizar incerteza) (a) Verifique que, se todos os desvios padrões no ajuste dos parâmetros de uma reta $y=a+bx$ forem iguais, a expressão para os valores ajustados é

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \quad ,$$

onde todas as somatórias vão de 1 a n, sendo n a quantidade de dados experimentais. (b) No ajuste de uma reta, $y=a+bx$, por dois pontos experimentais, apenas o termo constante é relevante. Suponha que em um experimento a distância entre os dois valores da abscissa, x_2-x_1=Δ, é fixo. Mostre que, se as incertezas dos dois pontos forem iguais, a maior precisão em $\tilde{a}$ é obtida quando $x_1=-\Delta/2$ e $x_2=\Delta/2$.

8 – (MMQ, linearidade nos parâmetros) Ajuste os parâmetros a e b da expressão $y = a \cdot x + b \cdot x^3$ considerando os dados experimentais abaixo, sendo as incertezas em y iguais a 1,0.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	10,0	18,6	27,8	32,9	41,1	41,7	41,9	40,4	30,8	19,6

R: a=4,95(0,06) e $b = -0{,}0099(0{,}0002)$.

II – Exercícios

1 – (Variância pela função probabilidade) (a) Escreva a expressão para a variância de uma grandeza y_i, que varia discretamente e que obedece à função probabilidade $P(y_i)$.

R: $\sigma^2 = \left\langle (y_i - y_0)^2 \right\rangle = \sum (y_i - y_0)^2 \cdot p(y_i)$, sendo que a soma se estende por todos os valores i para os quais $p(y_i)$ não é nula. (b) Mostre que na distribuição binomial, $P(n)=(N!/(N-n)!n!)\cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$ a variância é $N \cdot p \cdot (1-p)$.

2 – (Propagação de matriz de covariância) Os lados de um retângulo são 22.3(1.5) e 14.1(0.8), sendo nula a covariância entre eles. Determinar a matriz de covariância do perímetro desse retângulo e da diferença entre o lado maior e o lado menor.

R: $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 11{,}6 & 3{,}22 \\ 3{,}22 & 2{,}89 \end{pmatrix}$. O coeficiente de correlação é 0,56.

3 – (Desvio padrão da média e o MMQ) Determine a variância de $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n}$, supondo que todos os dados x_i têm o mesmo desvio padrão σ e covariâncias nulas.

R: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

4 – (Covariância, justificativa) Mostre que no ajuste dos parâmetros de uma reta, $y=a+bx$, se todos os dados independentes x_i forem positivos, então a covariância entre os valores ajustados $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ será negativa. Encontre uma explicação qualitativa para a covariância ser negativa>

5 – (Coeficiente de correlação) Duas grandezas y_i e y_2 têm matriz de covariância

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} .$$

Mostre que para que a variância de $y_1+\alpha y_2$ seja positiva ou nula para qualquer valor de α, então $-1 \leq \rho \leq 1$.

6 – (MMQ e mínima variância, um exemplo) A média ponderada de duas grandezas x_1 e x_2 é dada por $\dfrac{(\alpha x_1 + \beta x_2)}{(\alpha + \beta)}$. Mostre que se os desvios padrões de x_1 e x_2 são, respectivamente, σ_1 e σ_2 e a covariância entre eles é nula, então a menor variância da média ponderada é obtida quando $\alpha = 1/\sigma_1^2$ e $\beta = 1/\sigma_2^2$.

7 – (Variância pela f.d.p.) Considere a função densidade de probabilidade

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < y < b \\ \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Mostre que $y_0 = \langle y \rangle = (a+b)/2$ e $\sigma_y^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

8 – (Efeito do truncamento) Várias constantes fundamentais da natureza (como a carga elementar, a constante de Planck, a massa do elétron etc.) são conhecidas com incertezas menores do que 0,1 parte por milhão. Em outras palavras, são conhecidas com pelo menos 7 algarismos significativos. Entretanto, um pesquisador resolveu fazer seus cálculos arredondando os valores para 4 algarismos apenas, usando $6{,}626\times10^{-34}$J·s, $1{,}602\times10^{-19}$C e $9{,}109\times10^{-31}$kg respectivamente para a constante de Planck, a carga elementar e a massa do elétron. Considerando o resultado do exercício anterior, como ele deve estimar a incerteza desses valores?

9 – (Incerteza na interpolação) Mostre que no caso do ajuste dos parâmetros de uma reta, $y=a+bx$, o valor de y interpolado com menor desvio padrão ocorre em $x = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$.

III Exercícios

1 – (Covariância entre erros) Mostre que se $y_1 = y_{01} + e_1$ e $y_2 = y_{02} + e_2$, cujos índices "$_0$" indicam os valores verdadeiros, então $\mathrm{cov}(y_1 y_2) = \mathrm{cov}(e_1 e_2)$.

2 - Determine a matriz de planejamento do ajuste de um único valor a n dados experimentais correspondentes a medidas de uma mesma grandeza.

R: É um vetor coluna com n elementos iguais a 1.

3 – (MMQ) Ângulos externos e internos de um triângulo foram medidos com os mesmos desvios padrões iguais a 1 e de forma estatisticamente independentes. Os resultados estão tabelados abaixo (em graus).

Ângulo medido	resultado	Ângulo medido	resultado
θ_1	90	θ_3	31
θ_1	88	$\theta_1 + \theta_2$	149
θ_2	60	$\theta_1 + \theta_3$.	120
θ_3	32	$\theta_2 + \theta_3$	90

Sendo o vetor de parâmetros a ser ajustado $\mathbf{A}_0^t = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})$, mostre que a matriz de planejamento é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Determine o valor dos ângulos ajustados bem como sua matriz de covariância. Faça um teste de qui-quadrado para avaliar a qualidade desse ajuste.

R: Ângulos ajustados: 89,1^o, 59,6^o 31,1^o. Matriz de covariância:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & -0{,}08 & -0{,}05 \\ -0{,}08 & 0{,}38 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & -0{,}08 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$. Valor obtido χ^2: 3,6.

4 – (MMQ com vínculo) Usando os valores ajustados para os três ângulos do exercício anterior e a correspondente matriz de covariância, obtenha novos valores dos ângulos e a correspondente matriz de covariância com a condição que a soma deles seja 180^o.

5 – (MMQ) Duas medidas de uma mesma grandeza apresentaram os resultados 37,0(50) e 43,1(21), onde os valores entre parênteses são os respectivos desvios padrões em unidades da última casa. Supondo os dados estatisticamente independentes, determine o valor a ser adotado e o seu desvio padrão.

R: 42,2(1,9).

6 – (Consequência de uma correlação alta) Escreva a matriz de covariância de dois dados, 121(11) e 127(11), correspondentes a medidas de uma mesma grandeza, sendo que o coeficiente de correlação entre eles é ρ=*0.90*. A seguir, determine o valor a ser adotado, seu desvio padrão e o valor de qui-quadrado do ajuste.

R: $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 121{,}0 & 108{,}9 \\ 108{,}9 & 121{,}0 \end{pmatrix}$. Valor ajustado (e incerteza): 124,0(10,7). (A alta correlação positiva entre os dois dados, 0,90, é responsável pela pequena redução da incerteza do valor ajustado em relação às incertezas dos dados experimentais.). Qui-quadrado: 1,5.

7 – (Efeito de correlação negativa) Determine a média e o desvio padrão dos dados abaixo correspondentes a três medidas da mesma grandeza e calcule o

valor de qui-quadrado do ajuste. Dados: 35,0±2,0, 39,0±2,0 e 38,0±2,0 sendo o coeficiente de correlação entre todos os dados iguais a $\rho=-0.40$.

R: 35,3±0,5. Note a grande redução na incerteza da média quando comparada com a incerteza dos dados – por causa das correlações negativas. Qui-quadrado: 1,5.

8 – (MMQ, importância de cada dado na estimativa de cada parâmetro) Considere o ajuste dos parâmetros de uma reta, $y=a_0+b_0x$, sendo os valores da abcissa (1, 2, 3, 4) e os valores da ordenada (y_1, y_2, y_3, y_4) com matriz de covariância igual à identidade. Escreva explicitamente a matriz $(X^{`}\cdot V^{-1}\cdot X)^{-1}X^{`}\cdot V^{-1}$. Inspecione essa matriz para determinar qual dos valores de y tem maior peso na estimativa do parâmetro a_0. Verifique que o valor y_3 tem peso nulo na determinação de $\tilde{a}$. Obtenha a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados. Verifique que excluindo o dado que tem peso nulo na estimativa do parâmetro a_0, a variância de $\tilde{a}$ não se altera.

IV Exercícios

1 – (MMQ) Ajustar os valores de a e b da expressão $y=a\cdot e^{x}+ b\cdot e^{-x}$ aos dados abaixo. Considere todos os desvios padrões das variáveis dependentes (y) iguais a 1 e nulas as correlações entre os dados. Considere nulas as incertezas das variáveis independentes. Indique os valores ajustados, suas incertezas e a covariância.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	43.8	16.0	7.5	10.8	24.1	61.3

R: Valores ajustados e incertezas: 3,05(0,05), 5,81(0,13). Covariância entre os parâmetros: $-2{,}0\cdot 10^{-4}$.

2 – (Fixar o valor de um parâmetro; vínculo) Depois de feito o experimento do exercício anterior, ficou-se sabendo que o valor de b é exatamente 6,00 e não deveria ter sido ajustado. Assim, a partir dos resultados obtidos para a e b, imponha a condição que b seja igual a 6,00 e determine o novo valor a ser adotado para a bem como sua incerteza.

2 – (Propriedade de uma matriz de covariância) Verifique que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & -0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

não pode ser uma matriz de covariância, pois a variância da soma das três variáveis correspondentes a essa matriz seria negativa. (Uma matriz de covariância deve ser positiva semi-definida.)

3 – (Ajustando parâmetros em comum em função diferentes) Para medir a aceleração da gravidade em um local, um grupo de estudantes fez a seguinte experiência que permitia medir distância de queda e velocidade em uma queda livre. A posição na queda livre foi medida nos instantes t=1 s e t=3 s, obtendo os valores 5,6 m e 46,3 m. A velocidade foi medida nos instantes t=2 s e t=4 s, obtendo-se os resultados 209 m/s e 41,0 m/s, respectivamente. (Despreze a resistência do ar.) Considere a matriz de covariância igual a uma matriz identidade e suponha que a velocidade e a posição em t=0 s não sejam conhecidas. Considerando $d=d_0+v_0\cdot t+0{,}5\cdot g\cdot t^2$ e $v=v_0+g\cdot t$. Determine os valores ajustados de d_0, v_0 e g bem como a incerteza na aceleração da gravidade.
R: 0,3 m, 0,1 m/s e 10,2(6) m/s^2.

4 – (MMQ; novo ponto em um ajuste) O resultado do ajuste de uma reta por pontos experimentais levou ao resultado

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}45 \\ 0{,}33 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}014 \\ 0{,}014 & 0{,}0050 \end{pmatrix} \quad .$$

Inclua nesse ajuste um novo ponto experimental, x=3 e y=2,3, com desvio padrão 1 e não correlacionado com os dados anteriormente usados (e, portanto, também não correlacionado com $\tilde{a}$ ou $\tilde{b}$), determinando novos valores para os parâmetros e para a matriz de covariância.

R: $\tilde{a}' = 2{,}27$, $\tilde{b}' = 0{,}30$, $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}0095 \\ 0{,}0095 & 0{,}0043 \end{pmatrix}$

V - Exercícios

1 – (MMQ é estimador não tendencioso com menor incerteza) Considere dois dados experimentais y_1 e y_2 correspondentes a medidas de uma mesma grandeza y_0, com mesmas incertezas σ e não correlacionados. Mostre que a média ponderada

$$\bar{y} = -y_1 + 2y_2$$

não é tendenciosa, ou seja, $\langle \bar{y} \rangle = y_0$. Verifique que o desvio padrão da média acima é maior que o desvio padrão da média simples.

2 – (Relação linear entre parâmetros) Energias de três transições nucleares foram medidas, obtendo-se os resultados experimentais 100,273(0,022) keV[1], 98,044(0,025) keV e 198,265(0,041) keV, não correlacionadas entre si. Sabe-se que a soma das duas primeiras transições deve ser igual à terceira. Impondo esse vínculo, determine os novos valores a serem adotados para as energias das transições bem como a nova matriz de covariância. Explique porque essa matriz é singular. (Note que a matriz de planejamento, neste caso, é igual à matriz identidade de ordem 3.)

R: 100,264(0,020); 98,032(0,022); 198,296(0,026).

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{A}}} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}400 & -0{,}108 & 0{,}292 \\ -0{,}108 & 0{,}485 & 0{,}377 \\ 0{,}292 & 0{,}377 & 0{,}668 \end{pmatrix}$$

[1] 1 keV=10^3 eV; 1 eV=$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.